

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ
Физико-технический факультет
Кафедра Электроники и астрофизики

Алимгазинова Н.Ш.

Теоретические основы электротехники

для студентов, обучающихся по специальности
«Промышленная электроника и системы управления»

Алматы, 2025

4 лекция. Резонанс напряжения. Резонанс тока

Цель лекции. Изучить физическую сущность явления резонанса в электрических цепях, виды резонанса и условия его возникновения; освоить методы анализа резонансных процессов в простых и сложных колебательных контурах, а также их применение в практике электротехники и радиотехники.

План

1. Резонанс напряжений
2. Резонанс токов
3. Резонанс в сложном колебательном контуре

***Колебательным контуром** называется электрическая цепь, в которой содержатся индуктивность, ёмкость и активное сопротивление, и возможны свободные колебания тока и напряжения.*

В теории электрических цепей колебательные контуры играют важную роль, так как они обладают резонансными свойствами. **Резонансом** называют такой режим колебательного контура, при котором входное реактивное сопротивление контура или его входная реактивная проводимость равны нулю. Поэтому при резонансе напряжение и ток на входе контура совпадают по фазе.

В электрических цепях возможны два вида резонанса – **резонанс напряжений** и **резонанс токов**. Резонанс напряжений наблюдается в последовательном колебательном контуре, а резонанс токов – в параллельном колебательном контуре. В сложном колебательном контуре могут иметь место оба вида резонанса.

Явление резонанса применяется в радиотехнике. Например, с его помощью колебательный контур радиоприёмника настраивается на определённую частоту радиосигнала; в эфире существуют сигналы множества частот на малой амплитуде. Резонанс позволяет резко увеличить амплитуду сигнала на выбранной частоте и выделить её из числа многих, т. е. резонансный контур радиоприёмника работает как узкополосный фильтр. Таким же способом передаются телефонные разговоры многих абонентов по одной паре проводов в магистральной линии: они передаются в разных диапазонах частот, или что то же самое, на разных несущих частотах; при этом на сигнал высокой несущей частоты накладывается содержательный звуковой сигнал; такой процесс называется модуляцией; в конечном устройстве – приёмнике абонента происходит демодуляция: нужный диапазон частот вокруг настраиваемой несущей частоты усиливается резонансным устройством – фильтром.

Резонансные явления могут играть и отрицательную роль. В электротехнических установках резонанс часто оказывается опасным нежелательным явлением, так как может привести к авариям вследствие перегрева элементов электрической цепи или пробоя изоляции при перенапряжениях.

1. Резонанс напряжений

1.1 Основные характеристики

Режим работы участка цепи с последовательным соединением R, L, C элементов, при котором входное реактивное сопротивление контура равно нулю называется **резонансом напряжений**.

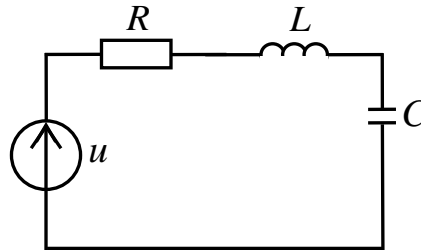


Рисунок 1

Источником энергии в последовательном колебательном контуре (рисунок 1) является источник переменного напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

Полное входное сопротивление контура

$$\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jx = |\dot{Z}|e^{j\varphi}. \quad (1)$$

где $X_L = \omega L$ - индуктивное и $X_C = \frac{1}{\omega C}$ - емкостное сопротивление. Ток в цепи равен

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{\dot{U}}{|\dot{Z}|} e^{-j\varphi}. \quad (2)$$

Знак аргумента комплекса тока φ зависит от соотношения между индуктивным и емкостным сопротивлениями контура:

✓ если в контуре $X_L > X_C$, φ положителен, ток отстает по фазе от входного напряжения (рисунок 1,а);

✓ если $X_L < X_C$, тогда φ отрицателен и ток цепи имеет емкостной характер (рисунок 1,б);

✓ при $X_L = X_C$ наступает режим *резонанса*, т.е. $\varphi = 0$ (рисунок 1,в).

При резонансе

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0. \quad (3)$$

В этом случае полное комплексное сопротивление цепи

$$\dot{Z} = R, \quad (4)$$

а ток будет иметь максимальное значение

$$I_0 = \frac{U}{R}. \quad (5)$$

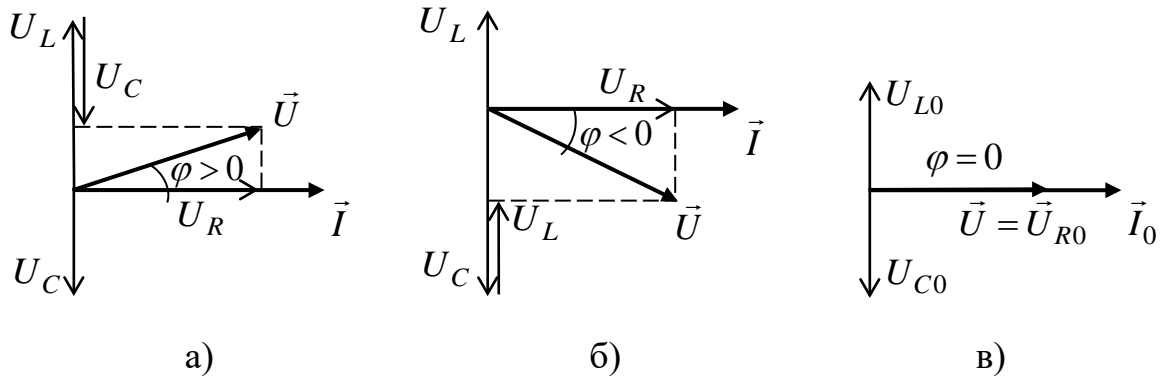


Рисунок 2 – Векторные диаграммы

Как видно из диаграммы, напряжения на индуктивности U_L и емкости U_C компенсируют друг друга, а напряжение на входе цепи U совпадает по фазе с током:

$$\psi_u = \psi_i. \quad (6)$$

Поэтому это резонанс напряжений. Если частота, подключенного к контуру источника энергии, не изменяется, режим резонанса достигается через изменения параметров цепи (L или C). Значения L и C при этом должны соответствовать условию (3). Если параметры контура остаются неизменными, режим резонанса наступает при частоте ω_0 , которая называется **резонансной частотой** контура.

При подключении к колебательному контуру источника энергии с частотой ω_0 , выполняется соотношение:

$$X_L = X_C, \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}, \quad (7)$$

тогда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (8)$$

При резонансе индуктивное и емкостное сопротивления равны, поэтому данное сопротивление называется **характеристическим сопротивлением** или **волновым сопротивлением** контура

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9)$$

Величину, характеризующую резонансные свойства контура, называют добротностью контура

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U}. \quad (10)$$

В электрических цепях, используемых в радиотехнических устройствах, добротность имеет величину порядка 50-300. Если $Q > 100$ колебательный контур настроен в резонанс, т.е. напряжение индуктивного и емкостного элементов во много раз превышает входное напряжение.

В общем случае под добротностью цепи подразумевают величину

$$Q = \omega_0 \frac{\sum W_{\max}}{P},$$

где $\sum W_{\max}$ – сумма максимальных значений энергии, запасаемой в реактивных элементах при резонансе, $P = I_0^2 R$ – активная мощность на зажимах цепи при резонансе.

Величина, обратная добротности контура, называется затуханием

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho} = \frac{U}{U_L} = \frac{U}{U_C}. \quad (11)$$

1.2 Энергетические процессы при резонансе напряжений

Полная энергия электромагнитного поля в колебательном контуре равна

$$W = W_M + W_{\text{э}}, \quad (12)$$

где $W_M = \frac{Li^2}{2}$ – энергия магнитного поля, $W_{\text{э}} = \frac{Cu_c^2}{2}$ – энергия электрического поля.

Если мгновенное значение тока при резонансе

$$i = I_m \sin \omega_0 t, \quad (13)$$

тогда напряжение на емкости отстает по фазе от тока на $\frac{\pi}{2}$ и равно

$$u_c = U_{cm} \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_{cm} \cos \omega_0 t. \quad (14)$$

С учетом (13) и (14), (12) примет вид

$$W = \frac{L}{2} \cdot [I_m \sin(\omega_0 t)]^2 + \frac{C}{2} \cdot \left[U_{cm} \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \right]^2 = \frac{L}{2} \cdot I_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{C}{2} \cdot U_{cm}^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

так как

$$U_{cm} = \frac{I_m}{\omega_0 C} = I_m \cdot \omega_0 L = \rho \cdot I_m = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_m, \quad (15)$$

полная энергия электромагнитного поля будет равна

$$W = \frac{L}{2} \cdot I_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{C}{2} \cdot \frac{L}{C} I_m^2 \cos^2(\omega_0 t).$$

$$W = \frac{LI_m^2}{2} (\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)) = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_{cm}^2}{2} \quad (16)$$

Так как амплитудные значения тока и напряжения являются постоянными величинами, имеем

$$W = const.$$

Таким образом, во время резонанса, полная энергия электромагнитного поля последовательного колебательного контура не изменяется: уменьшение энергии электрического поля сопровождается увеличением энергии магнитного поля, и наоборот. Реактивные элементы контура непрерывно обмениваются энергией, а внешний источник в этом обмене не участвует.

Если бы контур не имел потерь ($R=0$), колебательный процесс мог бы установиться без внешнего источника энергии. При замыкании заряженной емкости на индуктивность в контуре устанавливается колебательный процесс с частотой ω_0 . Энергия, запасенная в электрическом поле, перейдет в магнитное поле, затем произойдет обратный переход энергии и т. д. Такой процесс будет длиться бесконечно долго.

Если колебательный контур обладает активным сопротивлением, то имеют место потери энергии и колебательный процесс несет затухающий характер. Для компенсации потерь в активном сопротивлении необходим внешний источник энергии. Энергия, поступающая в контур от внешнего источника, в любой момент времени целиком переходит в тепло. Очевидно, что компенсация потерь будет происходить только в том случае, когда энергия поступает от источника в такт с колебаниями контура. Таким образом, частота источника должна быть равна резонансной частоте контура.

1.3. Частотные характеристики и резонансные кривые

Рассмотрим электрическую цепь, к которой приложено переменное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ с постоянной амплитудой, но переменной частотой (от 0 до ∞). При изменении частоты происходит изменение параметров цепи, меняется её реактивное сопротивление и полное сопротивление цепи, а также его фаза.

*Зависимость от частоты параметров цепи называются **частотными характеристиками*** (рисунок 3). Активное сопротивление контура R не зависит от частоты (прямая линия на рисунок 3). Прямая линия под некоторым углом соответствует графику индуктивного сопротивления $X_L = \omega L$, гипербола - емкостному сопротивлению $X_C = \frac{1}{\omega C}$.

Полное реактивное сопротивление контура x определяется разностью ординат графиков X_L и X_C :

✓ при резонансной частоте ω_0 сопротивления X_L и X_C равны по величине, x равно нулю;

✓ при частотах $\omega > \omega_0$ характер реактивного сопротивления контура – индуктивный (рисунок 2, а);

✓ при частотах $\omega < \omega_0$ реактивное сопротивление цепи имеет емкостный характер (рисунок 2, б).

Полное сопротивление контура определяется формулой

$$|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}. \quad (17)$$

*Зависимости действующих или амплитудных значений тока и напряжения от частоты называются **резонансными кривыми***. Качественное построение резонансных кривых может быть произведено на основе частотных характеристик (рисунок 4). Ток контура определяется по закону Ома

$$|I| = \frac{U}{|\dot{Z}|}. \quad (18)$$

Поскольку напряжение постоянно, графики $|I(\omega)|$ и $|Z(\omega)|$ взаимно обратны. В выражении напряжения на индуктивности $U_L = |I|X_L$ оба сомножителя зависят от частоты. При $\omega = 0$ и $X_L = 0$, поэтому $U_L = 0$. При увеличении частоты до ω_0 увеличивается как $|I|$, так и X_L , следовательно, U_L растет.

При $\omega > \omega_0$ ток уменьшается, но X_L растет, поэтому U_L вначале продолжает расти, но при некоторой частоте $\omega = \omega_L$ этот рост U_L прекращается. При $\omega > \omega_L$ график U_L снижается.

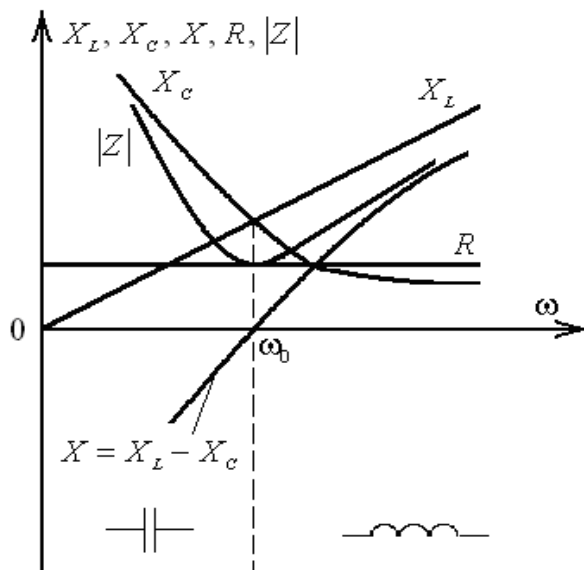


Рисунок 3 –
Частотные характеристики

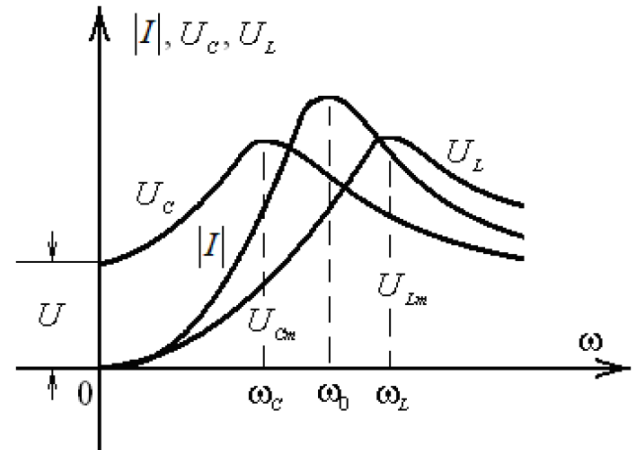


Рисунок 4 –
Резонансные кривые

В выражении $U_C = |I|X_C$ оба сомножителя также являются функциями частоты. При $\omega = 0$ (постоянном токе) конденсатор находится под напряжением источника, следовательно, $U_C = U$. При увеличении ω сопротивление X_C уменьшается, но $|I|$ вначале растет сильнее. Поэтому вначале растет и U_C , но при частоте $\omega = \omega_C < \omega_0$ начинается спад этого графика.

Графики U_C и U_L пересекаются при $\omega = \omega_0$.

Значения частот ω_L и ω_C , при которых кривые $U_L(\omega_L)$ и $U_C(\omega_C)$ достигают максимума, можно определить путем исследования условий максимума этих функций.

Эти частоты можно определить следующим образом. Определим ω_C из уравнения

$$U_C = I_m \cdot X_C = \frac{U_m}{|\dot{Z}|} \cdot X_C = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_C L - \frac{1}{\omega_C C}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\omega_C C} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 \omega_C^2 C^2 + (\omega_C^2 LC - 1)^2}}$$

При дифференцировании уравнения по ω_C , а затем, приравнявая результат к нулю, получим формулу для частоты ω_C , при которой напряжение на емкостном элементе U_C достигает максимального значения

$$\omega_C = \sqrt{\frac{2 - R^2 \frac{C}{L}}{2LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{2} R^2 \frac{C}{L}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{\rho^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{2 - d^2}{2}}. \quad (19)$$

Аналогичным образом можно определить

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2 - d^2}}. \quad (20)$$

Подстановка выражений ω_L и ω_C в формулы расчета напряжений показывает, что максимальные значения функций U_L и U_C одинаковы

$$U_{Lm} = U_{Cm} = \frac{2U}{d\sqrt{4 - d^2}}. \quad (21)$$

Степень смещения частот ω_L и ω_C относительно резонансной частоты ω_0 зависит от добротности контура. Частоты ω_L и ω_C заметно отличаются друг от друга только при низких добротностях.

1.4 Расстройка последовательного колебательного контура

В процессе использования установок имеют место отклонения режимов колебательных контуров от резонанса. Эти отклонения могут быть обусловлены как изменением частоты источника, так и изменением параметров контуров.

Отклонение режима контура, обусловленное изменением частоты, оценивается абсолютной или относительной расстройкой контура.

Абсолютной расстройкой $\Delta\omega$ называют разность частоты источника и резонансной частоты контура: $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. Поскольку частота ω может быть как больше, так и меньше резонансной частоты ω_0 , абсолютная расстройка $\Delta\omega$ бывает и положительной, и отрицательной.

Относительной расстройкой называют отношение абсолютной расстройки к резонансной частоте:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0}. \quad (22)$$

Кроме этих двух понятий в теории колебательных контуров широко применяется понятие *обобщенной расстройки* ξ .

Обобщенная расстройка учитывает все причины, которые могут вызвать отклонение режима контура от резонанса. Она равна отношению

реактивного сопротивления контура при любой частоте к активному сопротивлению:

$$\xi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\omega_0 L \cdot \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}{R} = \frac{\rho}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q\varepsilon. \quad (23)$$

Величина $\varepsilon = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$ также иногда называется *относительной расстройкой*.

1.5 Полоса пропускания последовательного контура

В устройствах, содержащих колебательные контуры, используются не только частота ω_0 , но еще целый ряд близких к ней частот, называемых «боковыми» частотами. Для того чтобы эти боковые частоты проходили через колебательный контур, он должен иметь соответствующую полосу пропускания.

Полосой пропускания последовательного контура называют область частот, в пределах которой ток уменьшается по сравнению с резонансным не более чем в $\sqrt{2}$ раз.

Абсолютная полоса пропускания S_A представляет собой разность граничных частот:

$$S_A = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q}. \quad (24)$$

Относительная полоса пропускания:

$$S_{OTH} = \frac{S_A}{f_0} = \frac{1}{Q} = d. \quad (25)$$

Следовательно, полоса пропускания контура тем меньше, чем выше его добротность.

2. Резонанс токов

2.1 Основные характеристики

Режим работы участка цепи с параллельными ветвями, при котором входная реактивная проводимость контура равна нулю называется *резонансом токов*.

Так как полная проводимость цепи

$$\dot{Y} = g + jb = \frac{1}{\dot{Z}} \quad (26)$$

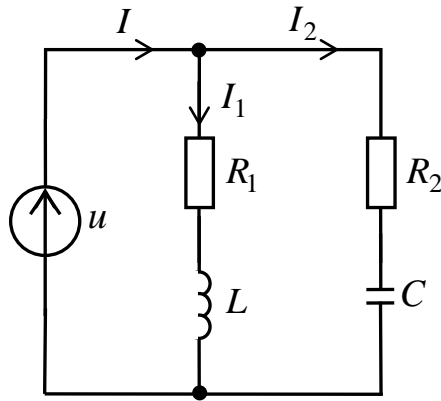


Рисунок 5 – Параллельный колебательный контур

Преобразуя (26) получим

$$\dot{Y} = \frac{1}{R + jx} = \frac{R}{R^2 + x^2} - j \frac{x}{R^2 + x^2}, \quad (27)$$

тогда

$$g = \frac{R}{R^2 + x^2}, \quad b = -\frac{x}{R^2 + x^2}. \quad (28)$$

Так как

$$b = b_L - b_C, \quad (29)$$

$$b_L = -\frac{X_L}{R^2 + X_L^2}, \quad b_C = \frac{X_C}{R^2 + X_C^2}. \quad (30)$$

Комплексная проводимость первой и второй ветвей контура соответственно равны

$$\dot{Y}_1 = g_1 - jb_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2}, \quad (31)$$

$$\dot{Y}_2 = g_2 - jb_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} - j \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}. \quad (32)$$

Входная проводимость контура

$$\dot{Y} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 = (g_1 + g_2) - j(b_1 + b_2) \quad (33)$$

Условие резонанса токов

$$b_1 = -b_2, \quad (34)$$

тогда

$$-\frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = -\frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}. \quad (35)$$

Из условия резонанса токов вытекает, что реактивные составляющие токов ветвей в режиме резонанса по абсолютной величине одинаковы:

$$I_{P1} = Ub_1; \quad I_{P2} = Ub_2; \quad I_{P1} = I_{P2}.$$

Равенство $I_{P1} = I_{P2}$ приводит к тому, что входной ток контура не имеет реактивной составляющей и совпадает по фазе с напряжением. Поэтому этот вид резонанса называется резонансом токов. Векторная диаграмма представлена на рисунке 6.

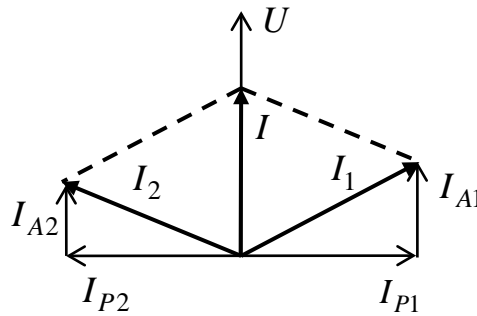


Рисунок 6

Определим резонансную частоту ω_p

$$\frac{\omega_p L}{R_1^2 + (\omega_p L)^2} = \frac{1/\omega_p C}{R_2^2 + \left(1/\omega_p C\right)^2},$$

$$\frac{1}{\left(R_1^2/\omega_p L\right) + (\omega_p L)} = \frac{1}{\omega_p C R_2^2 + \left(1/\omega_p C\right)},$$

$$\left(R_1^2/\omega_p L\right) + (\omega_p L) = \omega_p C R_2^2 + \left(1/\omega_p C\right),$$

$$R_1^2/L + \omega_p^2 L = \omega_p^2 C R_2^2 + 1/C,$$

так как $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (36)$$

Рассмотрим различные случаи:

✓ Если $R_1 = R_2 = \rho$, тогда резонанс токов возможен на любой частоте;
 ✓ Если $R_1 = R_2 \neq \rho$, тогда резонанс токов будет происходить на частоте резонанса напряжений $\omega_p = \omega_0$;

✓ Если $R_1 \neq R_2$ и $R_1, R_2 > \rho$ или же $R_1, R_2 < \rho$, тогда резонанс токов будет на одной частоте ω_p ;

✓ Если $R_1 > \rho$ и $R_2 < \rho$, тогда резонанс токов не возможен.

Полное сопротивление параллельного колебательного контура равно

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}, \quad (37)$$

При резонансе оно является активным, т.е. $Z = R_p$, но его величина, в отличие от последовательного контура, зависит не только от активных сопротивлений ветвей R_1 и R_2 , но и от реактивных элементов

В соответствии с условием резонанса токов, входная проводимость колебательного контура

$$Y = g = g_1 + g_2 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega_p L)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_p C}\right)^2}, \quad (38)$$

так как

$$\frac{1}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_p C}\right)^2} = \frac{\omega_p LC}{R_1^2 + (\omega_p L)^2},$$

выражение (38) примет вид

$$g = \frac{R_1 + \omega_p^2 \cdot L \cdot C \cdot R_2}{R_1^2 + (\omega_p L)^2},$$

тогда полное сопротивление контура

$$Z = R_p = \frac{R_1 R_2 + \rho^2}{R_1 + R_2}. \quad (39)$$

Добротность контура

$$Q = \frac{\rho}{R_1 + R_2}. \quad (40)$$

Рассмотрим различные случаи:

- ✓ если $R_1 \neq R_2 \neq \rho$, причем величины соизмеримы, то возможен резонанс токов при потерях энергии;
- ✓ если $R_1 = R_2 = 0$, то колебательный контур не имеет потерь;
- ✓ если $(R_1 = R_2) < \rho$, тогда колебательный контур имеет малые потери.

2.2 Частотные характеристики

Рассмотрим параллельный контур без потерь, тогда частотная характеристика индуктивной проводимости $b_L = \frac{1}{\omega L}$ изображается гиперболой, а для емкостной проводимости $b_C = \omega C$ - прямой линией.

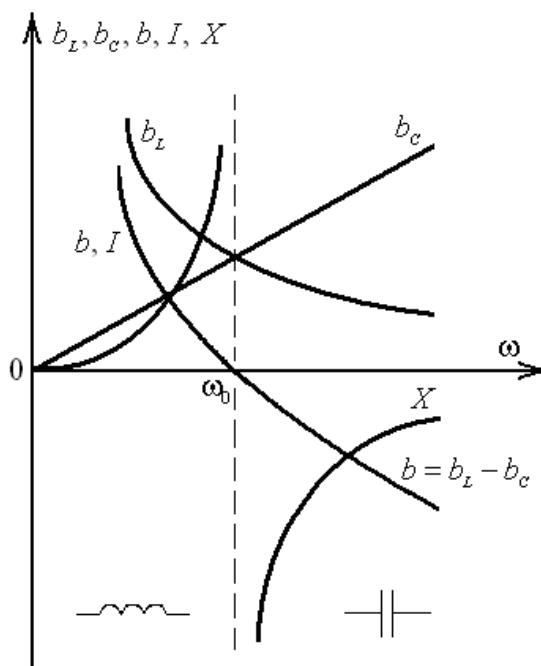


Рисунок 7 – Частотные характеристики

Зависимость входной проводимости $b(\omega)$ может быть получена из вычитания ординат графиков b_L и b_C . При частотах $0 < \omega < \omega_0$ входное сопротивление контура имеет индуктивный характер, при $\omega > \omega_0$ – емкостной. В режиме резонанса токов входное сопротивление бесконечно велико. Резонансная кривая входного тока идеального контура имеет ту же форму, что и график $b = f(\omega)$, только при частотах $\omega > \omega_0$ она представляет собой зеркальное изображение данной зависимости. Это связано с тем, что действующее значение тока – положительная величина.

3. Резонанс в сложном колебательном контуре

Рассмотрим сложный параллельный контур, который содержит в каждой ветви индуктивность и емкость. Пусть контур имеет высокую добротность, т.е. не имеет потерь

$$R_1 \ll |X_1| = \left| \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right|, \quad R_2 \ll |X_2| = \left| \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right|. \quad (41)$$

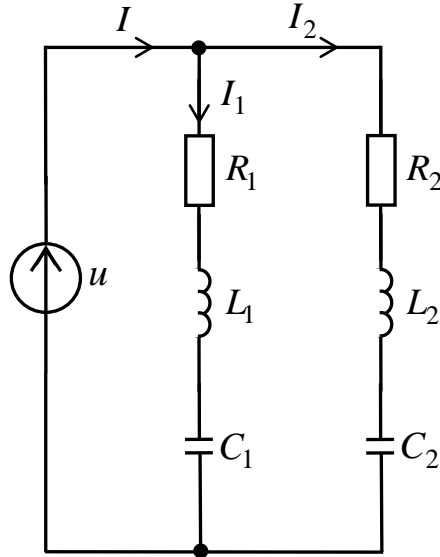


Рисунок 8

В этом случае, входное сопротивление контура

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{(R_1 + jX_1) + (R_2 + jX_2)} = \frac{R_1 R_2 - X_1 \cdot X_2 + j(R_2 \cdot X_1 + R_1 \cdot X_2)}{R + jX},$$

где $R = R_1 + R_2$, $X = X_1 + X_2$, причем $R_1 \cdot R_2 \ll X_1 \cdot X_2$. Слагаемым $j(R_2 \cdot X_1 + R_1 \cdot X_2)$ можно пренебречь, так как оно имеет малую величину (при частотах, близких к частоте резонанса токов X_1 и X_2 имеют противоположные знаки).

Входное сопротивление контура

$$\dot{Z} \approx -\frac{X_1 \cdot X_2}{R + jX} = R_{\mathcal{O}} + jX_{\mathcal{O}}, \quad (42)$$

где

$$R_{\mathcal{O}} = \frac{R \cdot X_1 \cdot X_2}{R^2 + X^2}, \quad X_{\mathcal{O}} = \frac{X \cdot X_1 \cdot X_2}{R^2 + X^2}. \quad (43)$$

При рассмотрении контура без потерь, т.е. при пренебрежении малыми сопротивлениями R_1 и R_2 получим полную проводимость при резонансе

$$|\dot{Y}| = |\dot{Y}_1| + |\dot{Y}_2| = 0. \quad (44)$$

Тогда $\dot{Y}_1 = -\dot{Y}_2$, $X_1 = -X_2$, следовательно

$$\omega_p \cdot L_1 - \frac{1}{\omega_p C_1} = \frac{1}{\omega_p C_2} - \omega_p \cdot L_2.$$

Если принять полную индуктивность равной $L_0 = L_1 + L_2$ и полную емкость - $C_0 = C_1 + C_2$, тогда резонансная частота

$$\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (45)$$

При резонансе сопротивление контура

$$R_p = \frac{X_1^2}{R} = \frac{X_2^2}{R} \quad (46)$$

при преобразовании получим

$$R_p = \frac{\left(\omega_p \cdot L_1 - \frac{1}{\omega_p \cdot C_1} \right)^2}{R} = \frac{(\omega_p \cdot L_0)^2}{R} \left(\frac{L_1}{L_0} - \frac{1}{L_0 \cdot \omega_p^2 \cdot C_1} \right)^2 = \frac{(\omega_p \cdot L_0)^2}{R} \left(\frac{L_1}{L_0} - \frac{C_0}{C_1} \right)^2$$

Введем обозначение

$$p_L = \frac{L_1}{L_0}, \quad p_C = \frac{C_0}{C_1},$$

так как добротность данного сложного контура

$$Q = \frac{\omega_p \cdot L_0}{R_1 + R_2} = \frac{\omega_p \cdot L_0}{R} = \frac{1}{\omega_p \cdot C_0 \cdot R}, \quad (47)$$

получим

$$R_p = Q^2 \cdot R (p_L - p_C)^2. \quad (48)$$

Из данного выражения видно, что при $p_L = 1$, $p_C = 0$ или же при $p_L = 0$, $p_C = 1$ сопротивление будет иметь максимальное значение. В этом случае вся индуктивность L_0 будет сосредоточена в одной ветви, а вся емкость C_0 - в другой ветви, т.е. сложный параллельный контур преобразуется в простой контур.

Контрольные вопросы

1. Опишите явление резонанса.
2. Запишите основные характеристики цепи, используемые при резонансе напряжений.
3. Опишите энергетические процессы при резонансе напряжений.
4. Объясните возникновение расстройки последовательного колебательного контура.
5. Запишите формулы для определения полосы пропускания последовательного контура.
6. Запишите основные характеристики цепи, используемые при резонансе токов.
7. Зарисуйте и опишите частотные характеристики и резонансные кривые при резонансе напряжений и токов.
8. Объясните резонанс в сложном колебательном контуре.

Литература

- 1 Алимгазина Н.Ш. Теория Электрических Цепей. Курс Лекций. – Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 8,7 п.л..
- 2 Манаков С.М., Алимгазина Н.Ш., Бурисова Д.Ж., Исимова А.Т. Основы электротехники в упражнениях и задачах. – Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 10 п.л..
- 3 Манаков С.М., Алимгазина Н.Ш., Толегенова А.А. Учебно-Методическое Пособие По Курсу "Теория Электрических Цепей". – Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 12 п.л.
- 4 Теоретические основы электротехники. Версия 1.0 [Электронный ресурс]: конспект лекций / С. Г. Иванова, В. В. Новиков. – Электрон. дан. (4 Мб). – Красноярск: ИПК СФУ, 200
- 5 Атабеков Г. И. Основы теории цепей : учебник / Г. И. Атабеков . – 2-е изд., испр . – СПб. : Лань, 2006 . – 432 с.
- 6 Прянишников В.А. Теоретические основы электротехники. М: КОРОНА-Век, 2012. - 368 с.
- 7 Атабеков Г.И. Нелинейные электрические цепи. Теоретические основы электротехники. Учебное пособие. СПб.: Питер, Лань, 2010. – 432 с.
- 8 Бессонов Л.А. Электрические цепи. Теоретические основы электротехники. М: Юрайт, 2016. – 701 с.
- 9 Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для студ. вузов спец. Радиотехника. – М.: Высшая школа, 2000. – 574 с.